

**Ege Üniversitesi-Mühendislik Fakültesi**  
**Makina Mühendisliği Bölümü**  
**2010-2011 Öğretim Yılı-Güz Yarıyılı**  
**MK309 Akışkanlar Mekaniği I (2+2) Dersi**

**Ders Notu 03**

**Bernoulli Denkleminin Kullanımındaki Sınırlamalar**

Sürekli sıkıştırılamaz akış:  $\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{sabit}$  (Bir akım çizgisi boyunca)

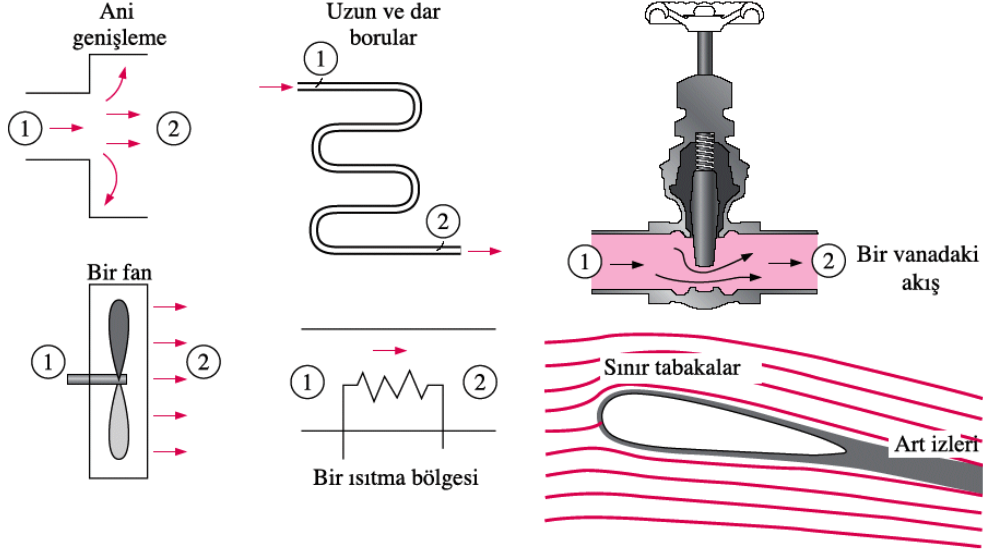
[Akım çizgisi: Belirli bir anda, bir akışkanın hız alanındaki hız vektörlerine her yerde teğet olan eğridir. Dolayısıyla akım çizgileri, her bir noktadaki akışkan hareketinin yönünü gösterir. Sürekli akışta akım çizgileri zamanla değişmez].

Yukarıda verilen Bernoulli denkleminin uygulanabilirliğindeki sınırlayıcı koşullar ve kullanılabilirliğindeki sınırlamalar aşağıda verildiği gibidir:

**1.Sürekli Akış:** Bernoulli denkleminin kullanımındaki ilk sınırlama sadece sürekli akışa uygulanabilir olmasıdır. Bu yüzden, kısa süreli devreye alma ve kapatma süreleri ya da akış şartlarında değişimin olduğu süreler boyunca kullanılmamalıdır. Bernoulli denkleminin sürekli olmayan akışlar için türetilmiş formu da vardır.

Sürekli olmayan-sıkıştırılabilir akış:  $\int \frac{dP}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + gz = \text{sabit}$

**2.Sürtünmesiz Akış:** Ne kadar küçük olursa olsun her akışta bir miktar sürtünme vardır ve sürtünme etkilerinin göz önüne alındığı veya alınmadığı durumlar olabilir. Genel olarak, özellikle düşük akış hızlarında, büyük en-kesitli ve kısa akış kesimlerindeki sürtünme etkileri göz önüne alınmaz. Sürtünme etkileri genellikle uzun ve dar akış geçitlerinde, bir cismin aşağı akımındaki art izi bölgelerinde ve (çeperlerinden akışkanın ayrılma olasılığının yüksek olmasından dolayı) yayıcılar gibi ayrılmanın olduğu akış kesimlerinde önemlidir. Sürtünme etkileri, ayrıca katı cismin yüzeyleri yakınında önemlidir ve bu yüzden Bernoulli denklemi akışın merkez bölgelerindeki bir akım çizgisi boyunca uygulanabilir. Bunun yanında akışın yüzeye yakın bölgelerindeki bir akım çizgisi boyunca uygulanamaz.



Bir akış kesiminde akım çizgili yapıyı bozarak Bernoulli denklemini geçersiz kılan elemanlar ve sürtünme etkileri

Akışın akım çizgili yapısını bozarak, bir boruya keskin giriş veya akış kesiminde bulunan kısmen kapalı bir vana gibi önemli ölçüde karışmaya ve geri-akışa yol açan bir unsur Bernoulli denklemini uygulanamaz kılar.

**3.Mil işinin olmaması:** Bernoulli denklemi, bir akım çizgisi boyunca hareket eden akışkan parçacığı üzerine uygulanan kuvvet dengesinden türetilmiştir. Bu yüzden Bernoulli denklemi pompa, türbin, fan ya da başka bir makina ya da çark gibi akım çizgilerinin bozulmasına neden olan ve akışkan parçacıklarıyla enerji etkileşimine giren makinelerin bulunduğu akış kesimlerinde uygulanamaz. Göz önüne alınan akış kesiminde bu makinelerin bulunması durumunda, mil işi giriş çıkışını hesaba katmak için bunun yerine enerji denklemi kullanılmalıdır. Öte yandan, Bernoulli denklemi (kullanımı üzerindeki diğer sınırlayıcı şartların sağlanması koşuluyla) yine de makinanın öncesindeki ve sonrasındaki akış kesimlerine uygulanabilir. Bu durumlarda Bernoulli sabiti makinanın yukarı akımında ve aşağı akımında farklı değerler alacaktır.

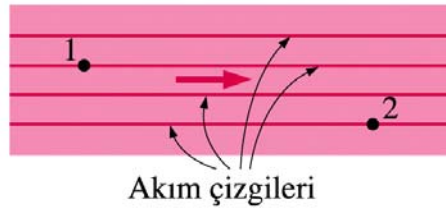
**4.Sıkıştırılmaz akış:** Bernoulli denkleminin türetilmesinde yapılan kabullerden birisi de  $\rho =$  sabit ve bunun sonucu olarak akışın sıkıştırılmaz olduğudur. Bu şart, sıvılarda ve ayrıca Mach sayısı 0.3 değerinden küçük olan gazlarda sağlanır. Gazların sıkıştırılabilirlik etkileri ve bunun sonucunda yoğunluk değişimleri göreceli olarak düşük hızlarda göz önüne alınmayabilir. Bernoulli denkleminin sıkıştırılabilir akış için türetilmiş şekilleri aşağıda verildiği gibidir.

$$\text{Sürekli akış: } \int \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{sabit (Bir akım çizgisi boyunca)}$$

$$\text{Sürekli olmayan-sıkıştırılabilir akış: } \int \frac{dP}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + gz = \text{sabit}$$

**5. Isı transferinin olmaması:** Gazın yoğunluğu sıcaklıkla ters orantılıdır ve bu nedenle Bernoulli denklemi ısıtma ve soğutma kesimleri gibi önemli oranda sıcaklık değişimlerinin söz konusu olduğu akış bölgelerinde kullanılmamalıdır.

**6. Bir akım çizgisi boyunca akış:** Bernoulli denklemi,  $P/\rho + V^2/2 + gz = C$  bir akım çizgisi boyunca uygulanabilir ve C sabiti, genellikle farklı akım çizgileri için farklı değerler alır. Fakat, akış bölgesinin döneimsüz olduğu ve bu nedenle çevrintinin oluşmadığı akış alanlarında C sabitinin değeri tüm akım çizgileri için aynı kalır. Bu durumda Bernoulli denklemi akım çizgilerine dik yönde de uygulanabilir.



$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Akış döneimsüz olduğunda Bernoulli denklemi akış boyunca herhangi iki nokta arasında uygulanabilir

Akış döneimsüz olduğunda Bernoulli denklemi, döneimsüz akış bölgelerinde herhangi iki nokta arasında uygulanabilir.

Bernoulli denklemi, basit bir şekilde xz-düzlemindeki akış iki-boyutlu kabul edilerek türetilmiştir. Fakat denklem aynı akım çizgisi boyunca uygulanmak suretiyle genel üç boyutlu akış için de geçerlidir.

---

#### **Kaynaklar:**

1.Cengel YA, Cimbala JM, "Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications", Second Edition (SI), McGraw-Hill, 2010.

2.Fox RW, Pritchard PJ, McDonald AT, "Introduction to Fluid Mechanics", 7th Edition (SI), Wiley, 2010.

---